Faculty of Mathematics, University of Zagreb, Graduate course 2011-2012. "Blind separation of signals and independent component analysis"

### Lecture V

# Independent component analysis for problems with noise

#### Ivica Kopriva

#### Ruđer Bošković Institute

e-mail: ikopriva@irb.hr ikopriva@gmail.com
 Web: http://www.lair.irb.hr/ikopriva/

### **Course outline**

Motivation with illustration of applications (lecture I)

- Mathematical preliminaries with principal component analysis (PCA)? (lecture II)
- Independent component analysis (ICA) for linear static problems: information-theoretic approaches (lecture III)
- ICA for linear static problems: algebraic approaches (lecture IV)
- ICA for linear static problems with noise (lecture V)
  Dependent component analysis (DCA) (lecture VI)

### **Course outline**

- Underdetermined blind source separation (BSS) and sparse component analysis (SCA) (lecture VII/VIII)
- Nonnegative matrix factorization (NMF) for determined and underdetermined BSS problems (lecture VIII/IX)
- BSS from linear convolutive (dynamic) mixtures (lecture X/XI)
- Nonlinear BSS (lecture XI/XII)
- Tensor factorization (TF): BSS of multidimensional sources and feature extraction (lecture XIII/XIV)

### ICA for linear static problem with noise

Two important cases need to be distinguished:

- sensor noise:  $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n}, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^M, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times M}, \ \mathbf{n} \in \mathbb{R}^N \ M \leq N$
- external noise: **x=As**, where  $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \dots s_m \\ True \ sources \end{bmatrix}^T \underbrace{s_{m+1} \dots s_m}_{external \ noise-artifacts}$

- "Noisy ICA", Chapter 15 in A. Hyvarinnen. J. Karhunen, E. Oja, "Independent Component Analysis," John Wiley, 2000.
- "Robust Techniques for Noisy Data," Chapter 8 in A. Cichocki, S. Amari, "Adaptive Blind Signal and Image P4ø3@ssing," John Wiley, 2002.

It is assumed that **n** is Gaussian i.i.d. with a known variance  $\sigma^2$ . Then  $\mathbf{R}_{\mathbf{n}} = \sigma^2 \mathbf{I}_{\mathbf{N}}$ . It is also assumed that **n** is independent from **s**.

Three strategies for dealing with sensor noise can be used:

- noise reduction (denoising) can be performed on sensor level.
- during whitening (decorrelation) noise can be taken into account through dimensionality reduction.
- some ICA algorithms/contrast functions can be explicitly modified/preferred to take into account presence of noise.

Additive noise can be reduced through preprocessing/filtering sensor signals  $x_i(t)$ , i=1,...,N. This makes sense for signals that pose temporal structure such as speech, music, EEG, ECG, etc.

It is important that filtering operation be linear and time invariant. Such filters are represented through discrete time convolutive summation:

$$\tilde{x}_{i}(t) = \sum_{u=0}^{T} h(u) x_{i}(t-u) = \sum_{u=0}^{T} h(u) \sum_{j=1}^{M} a_{ij} s_{j}(t-u)$$
$$= \sum_{j=1}^{M} a_{ij} \sum_{u=0}^{T} h(u) s_{j}(t-u) = \sum_{j=1}^{M} a_{ij} \tilde{s}_{j}(t)$$

Filters used for noise reduction perform smoothing operation. As an example:  $\tilde{x}(t) \leftarrow \frac{x_i(t) + x_i(t-1)}{x_i(t-1)}$ 

 $\tilde{x}_i(t) \leftarrow \frac{x_i(t) + x_i(t-1)}{2}$ 

These filter are known as low-pass filters. They are frequency selective and filter out high frequency part of the signal. This is based on the assumption that power spectrum density of the signal is in low frequency part of the spectrum while power spectrum density of the noise is approximately flat and spread across the whole spectrum (assumption on noise is to be white).

When number of sources M is less than number of sensors N the whitening transform z=Qx can be used for dimensionality reduction and denoising:

$$\mathbf{z}(t) = \underbrace{\Lambda^{-1/2} \mathbf{V}^T}_{\mathbf{Q}} \mathbf{x}(t) : \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^T$$

However, if *M* source signals have dominant energy over the noise then:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{T} = \mathbf{V}_{M}\Lambda_{M}\mathbf{V}_{M}^{T} + \mathbf{V}_{N-M}\Lambda_{N-M}\mathbf{V}_{N-M}^{T}$$
$$\mathbf{z}(t) = \Lambda_{M}^{-1/2}\mathbf{V}_{M}^{T}\mathbf{x}(t)$$

Alternatively, if the noise covariance matrix is known  $\mathbf{R}_{\mathbf{n}} = \sigma^2 \mathbf{I}_{\mathbf{N}}$  then:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}}(0) = E\left[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^{T}\right] = E\left[\left(\mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)\right)\left(\mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t)\right)^{T}\right]$$
$$= \mathbf{A}E\left[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^{T}(t)\right]\mathbf{A}^{T} + 2\mathbf{A}\underbrace{E\left[\mathbf{s}(t)\mathbf{n}^{T}(t)\right]}_{0}\mathbf{A}^{T} + E\left[\mathbf{n}(t)\mathbf{n}^{T}(t)\right]$$
$$= \mathbf{A}\mathbf{R}_{\mathbf{s}}(0)\mathbf{A}^{T} + \sigma^{2}\mathbf{I}_{N}$$

 $\Rightarrow \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{R}_{\mathbf{x}}(0) - \sigma^{2} \mathbf{I}_{N}$ 

### ICA for external noise

Some of the M sources are true sources while the rest are artifacts (noise):  $\mathbf{s} = [s_1 \dots s_m, s_{m+1} \dots \dots s_M]^T$ 

True sources external noise-artifacts

Let us suppose that  $s_{k+1} \dots s_M$  have nearly Gaussian distributions. We can use some measure of non-Gaussianity (kurtozis) to distinguish  $\{s_m\}_{m=1}^k$ from  $\{s_m\}_{m=k+1}^M$ . After ICA-based decomposition:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s} = \sum_{m=1}^{k} \mathbf{a}_{m} s_{m} + \sum_{m=k+1}^{M} \mathbf{a}_{m} s_{m}$$

we can perform "data cleaning" through backprojection:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}_{true} = \sum_{m=1}^{k} \mathbf{a}_m s_m$$
 10/30

### ICA for external noise

However, artifacts may also have large value of kurtozis, negative value of kurtozis, etc. In EEG data analysis artifacts are associated with the eye blinks, muscle activities (large positive kurtozis), 60 Hz power supply signal (negative kurtozis).

Any kind of *a priori* knowledge can be used to distinguish artifacts from true sources. For example if it is known that true sources have temporal structure a measure of temporal predictability can be used to distinguish them from artifacts:

$$F\left(\{s_{m}(t_{k})\}\right) = \log \frac{V\left(\{s_{m}(t_{k})\}\right)}{U\left(\{s_{m}(t_{k})\}\right)} = \log \frac{\sum_{k}^{k_{\max}} \left(\overline{s}_{m}(t_{k}) - s_{m}(t_{k})\right)^{2}}{\sum_{k}^{k_{\max}} \left(\widetilde{s}_{m}(t_{k}) - s_{m}(t_{k})\right)^{2}}$$
11/30

## ICA for external noise

*V* reflects the the extent to which  $s_m(t_k)$  is predicted by a long term moving average and *U* reflects the extent to which  $s_m(t_k)$  is predicted by a short term moving average.

For signals with temporal structure a temporal predictability measure can even be used as a contrast function for blind source separation<sup>\*</sup>, that is constructed by maximization of temporal predictability.

In the following example 32 EEG signals are decomposed by the SOBI algorithm. Sources signals are ordered by a measure of temporal predictability. Artifacts as well as true noise sources are removed and clean data are obtained by backprojection.

\*Stone, J.V., 2001. Blind source separation using temporal predictability. Neural Comput. 13, 1559-1574.

12/30



80	and the second	and the second	at a second state with the state of the	an an an an an Arthur an an Martin an an Anna an Mar	
40		and the second	A state of the second second second second second		
20	and the second state of th	A CONTRACTOR OF			PERSONAL PROPERTY.
Ċ	6	0 10	0 1!	50 2	200
20	والمتحرج ومعاليك والمروانية والمحاج والمحاج والمحاج ومحاطه والمحاج	والمحفظ المربع ومعارضها والمرجعة والمعط والمعاط والمعاطية والمعادية	المسيحينان والمستحدية ويعاط واللاف المرجع والمستحي والمحافظ	and a state of the second state	ALL MARKED BURG
0		ana an ann an an abhra abhra abhra abh	al allow water to start the stranged	en e	al da an da kin in sa sakt da
-20	<mark>da</mark> an daha Menerika galari dalah ganda kasi dalam pertekan dalam kasi dalam dalam dalam dalam dalam dalam dalam	and a second	An and a start of the start of	and the second state of the se	
0	6	0 10	0 15	50 2	200
50	ande ha mena and a star and the first of the first address of the start and	أأفقادهم والانتهار وأرابه والمعمار المروان والمتعادية والمتحد والمتحد	A de la contra con este de la filo de la contra de la con	والجارية والمتحافظ والقرام أهلا محفا والمراجع	<b>.</b>
0	and a second stand of the second of the second s	and the product of the program in the later of the state	A sector of the		MAAMMAA
-50					
C 7	E			50 2	200
50	and the second	المربية أحمد في فحد بان القريم معالية أنها والمقرم في القريم التربية الم	والدوليل 🔥 المارينيونية وماركيس المراجع ومرور ومراجع	and the second second second second second	A an all a second
-50	day be been disk in the hyper of a flash dealer of the first and the dealer of the second second second second	dente all states in the second of the formation of the second states and the	in the second second state of the second second second second	and the state of the second second second second	A State of the second s
-100					
ſ				50 · · ·	
50		أنرية بعدامه بشرية منهاته بالأثلاث فتاستغراف أأتامه والمتعط أتكله فترقد	and a strange second days and store the data of the strange store starting	an territoria a constante de La	ومالقاتهم بالمدام المحكم والاربطي
-50	an in the state of the	an an air <sup>a</sup> n an bha an	The substitutions and the knowledge of the set	and a second	A she will be a she will be set
	· · ·	in <u>10</u>	Ω 11	ן אוואאאאיזיי יואר איזיק איזיי יאן ג 10	ן <u>ריידר איימיראין אייר אייראי</u> . 200
50	An	in a character a second da se second	e a set data data		
n		1. Second Contraction of the second	المراجعة المراجع المراجع المراجع المراجعة المراجعة المراجعة المراجع المراجع المراجعة المراجعة المراجع المراجعة المراجعة المراجع المراجع المراجعة المراجعة المراجعة المراجعة المراجعة المراجعة المراجعة المراجعة المراجعة المراج	وأحدر المتألكة والمراجلة مريرية أحالك أكالم ومرجعته أكاله المتحاط المتحاط المتحاط المتحدر والمعا	and a long of the state of the
Ĭ	and the second secon	er gjag generger se friger generger se friger se f	n ya na matana kun kilan kalin ya kalin kalin ya kalin k	a de la constante de la constan La constante de la constante de	aleste all protofits enoughpath.
-50 L C		io 10	0 1!	50 2	 200
50			a des sous des sous entre sous-délais comparés	annen bei Atter beiterig dahrichten eine einfelen in in	مقريفين البريق فلعظم والمع
0				na na serie de la constante de La constante de la constante de	
-50	n a shekara daga ka shekara da ka shekara a ka shekara a ka shekara shekara shekara shekara shekara shekara sh	approximate definition and the formal approximate definition of the second second second second second second s	and the second secon	and a second state of the	
Ċ	5	io 10	0 1	50 2	200
50	al anti-anna airsin an tain an tain an tain an tain	and the second s	An and a second se	anders and and the second of the second s	القريب والمراجر والمراجر والألف
-50					
100	ala a la serie de la 🕺 de la la la serie de la	and the state of t	an an the second of the data been added as the data of the second of the	a a a a a a a a a a a a a a a a a a a	a a da di prazim prezi
Ċ	6	0 10	0 1	50 2	200

100	ى بىن يىلامقىن بىلىك <mark>ان ب</mark> ى قى خەنباللاردۇرىي <mark>الم</mark> انيان الىن الىرى بى	المتأميط أعيني معاطرتي ويتعتبه وستقراص ويتأثر المعاطر والرواني ألامي	والأقاري المترجل والمتعادين والمتأثرين فترجه وماصطورين ومطاولتي الم	والأطاري والمعالم والأخطال والمنافر والمنطقة والربي بعار أتما أعطاهم والأسراب أوروب والمسرور بالاخطامي	and a state of a state of the
0	a second a second s	and the manage of the second state of the second state of the second second second second second second second	the standard server and method and the server being server as a little to the server as the server as a server as the server as a s	and the constant phase dependent of the physical state of the phys	her and a straight of the straight of the
.100 l	יי איזי יי <mark>יקר</mark> ו (1	יייי "ייי" איין איין איין איין איין איין	10 15	· · · ·	
50	en en alle en				—
0 -50				والمتألفة وتعاريك أعرون والأناكري فالعطا التطويس	All Courses and All Courses and All
-100	ter in the second se	and a second			All and pills and the strength
C C .	) 5	0 10	0 15	50 20	00
40 20	ومسوع ومرور وحسالا الإرامة أولاني واستنزلته وربا التلاح فأتداخر عنداه فأناك المرور	والمتلفظ ومحاربهما المتلكمة ومحاجز المراجع والمحاجز المتعاقف والمحاجز والمحاجز	فالألف وزير وأعورهم بالمقربة فأنتاب وكالألم فالتقرير والمقاطعين والمتعاط والرواني	مريا <mark>أ</mark> مر ومادرا أحاد الاستخدار بأسراط الأ <sup>عرار</sup> ين والرواليين <sub>ال</sub> يتعادا الأعلمي الاقتصافين الاست	وروا المردون والماليان المراجع والمالية
-20	an a	a start the energy provided the started on the test of the test of the start provided on the start of the start	<mark>han, an an bahari kang palan di baharan palam palapan panan kan<sup>a</sup>n termet</mark>	والمرفرين ويرعده الالالار أن والألكان ومرور أوراقه والمالية والمحمد المراجع والمحمد المراجع والمراجع	And Man in the and the second second
-40   C	<u></u>	0 10		jo 20	0
50	ىرى بى	المراجع والمعاري ومقربه الملازية والمنافعة ومحمد ومحمد والمعام والمنافعة والمحمد والمحال	المراجع والمراجع والمراجع والمعادية والمعادي والمراجع والمراجع والمراجع والمراجع والمراجع والمراجع والمراجع		ماهيانى بدير المتعامية التي بالله
0	en an a balance and a san a sain da an	Ale basis and distribute an asset state of bits in the state does not be a section.	sector which are a sector of the sector of t	en en sinte a ser a s	teleforation man teleforation and teleforation
-50	and the state of t	l International de la servición de la la la la servición de la servición de la servición de la servición de la s	a na an d <b>ath</b> lann a san an tart di tart.	and the second second second second and the	1
0	5	0 10	0 15	i0 20	)O
50	the second s	hterene an and a fair an all the periods are a reason of able the area we have	والمتلومة فأقافل وأبرر فرافته أماقت والمتعرب والتقد مترجد والمتعربة فالمتعربة فأفاقتهن	المطالبين بالجال والاحطار بالريالة المتقلي ورعاله المطالب ومعالماتهم والمتعالم ومدور ومعافلاتهم	المتحديدية والمحمد والمريانة
-50	and a second the second se	and a special set of the present special s	and the share part of the state of the second state of the second state of the second state of the state of the	as to here a product that has been been all a pays in products the barrent of the	adia di Generali Manimatra di Chi
C	) 5	0 1C	)0 15	i0 20	l )O
50	ation in a second and the second s	nan an an an haile attack an an the state of the state of the state of the	المتحفظ الأمين أواطنا بتناقي والمتحد المحاج والمحاج والتعري	المقالين ورواد فليفض فالمألوب ويروي فالقرار والروع بقيرون المريطان	Alexandra and a state of the second
0	and provide the second state of the second state o		a dinasi a maa katala a sana ina dina a sa dinasi di sa dinasi dinasi di sa dinasi dinasi di sa dinasi dinasi a		All should be an ended and a local
-50	alt falanda a falazatta	and the first of the first of the second s		ա. Հայ հայտանի հետուները հանդարական հարարաները։	r
EOL	J 5		JU 15		
0	the second state and state and second states the states are presented as a second state of the second second se	فتر واستعد أطارتهم رشم فتعالم يعاشر وليري ومتناطسة القرار ويتقرر ويتشعطك واردوامات والتروية	الماسوين الأند يطميعانكم والظلم ويطادو والأحربين ورواطالان الا	and the standard back of the standard of the standa	الملاج الالالعلاقة محم المحلم محمد الم
-50 100	and the second state of th	and any difference of the product of the design of the product of	a ha ha ta	and the second secon	i Adho an An Bhordo, an Ida <del>ba</del> t
001	5	0 10	0 15	i0 20	00
50 0	and the second states and the second s	with the same dealers the difference of the anticipation is the same of the same of the same of the same of the	والمتحافظ والمراجع والمنافعة والمراجع والمتلاف والمتحافظ والمتحافظ والمحافظ والمحافظ والمراجع	مر المعاولة العالمية المراجب وعلم المراجب والمراجب المراجب والمراجب والمراجب والمراجب والمراجب والمراجب والمراج والمراجب والمراجب وال	
-50 -100	والمسهادين ومرود المراجعة <sup>الم</sup> الا ومرود المراجع والمناطع والمحاصر ومرود والمحاطية والمراجع ومرودة والمراجعة والمراجع	and a second life, the state of the second sec	a na sa	ور بارور والمنهار والمنتخطية والمنافرة المنافرة المنافرة	
-150   C	) 5	<u>ل</u> ال المحمد ا محمد المحمد ا	  0 15	jū 21	 )0

100		والمحرار وتعاديهم والأخطائي والمحمو ومتقتله ومعاقبا ويرجى والمقروطان	وموجوع المقدم أأفأت فيغتر المنفاة المتنبي والمتعمل وتنقاقت الحروي وروي والمقار تتأكر ورويته	والأحديدية أفأنها ومعفيه والفائلة الأنير فحمور متعاقلته ورريبا ويعمد أفاسر ومرعاقين	الالالحمير ومستشما الأليا أحسن والمسطالة
50			and the first production of the state of the second state of the state	and a product of the	a to a new second of the nut
0	a na ana amin'ny fanina dia mampiasa amin'ny fanina amin'ny fanina amin'ny fanina amin'ny fanina amin'ny fanina	failulate south of the second s			-
(	5	0 10	0 15	0 2	0
50	الله. 1931 - مريون ماري مشارك المريون من المراجع من المراجع المراجع من المريون من المريون المريون المريون من المريون	والمحمد المتركبة والمراجع والمراجع والمحمد والمحمد والمحمد والمحمد والمحمد والمحمد والمحمد والمحمد والمراجع	والمتحافظ المتحافظ والمحافظ والمحاص والمقاص والمحاف والمحافظ والمحافظ والمحافظ والمحافظ والمحافظ	والمراجع والمراجع والدروالية والألفة فالمرجع والمتقافية والمراجع والمتعاقب ومترافقا والمراجع والمحاطين	Aller and a market of the second state
0	and the second	e a la calificia a defe il des card es la ser contrativitativitativa e tata defensiva dar 11. defe	and well in distant in contracted, and to consider the same of the efficiency of the state state state	an al line literation counter filmed a subtraction of the subtract states and he	addition of a state of a distribution
-50	a a se a construction de la constru La construction de la construction d	ander in the former of the first standard and the second standard standard standard standard standard standard	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	and a data in the first definition of	ի հերդունի անդանին։ Դ
(	5	D 10	0 15	i0 2	0
50	- Jan de Level and Marker and Marker and Andreas and Andreas and Andreas and Andreas and Andreas and Andreas and		والمقلو فرطوريه والور المرافعة ليفن المقاطين والفقل والمقومين والدوار فيتقافين	التأويلهم وروادها وبالمراجع فالاستأر الألك مقرر بالمروح والقصاص ومانتظار وشراده وراكته فتعارين	والمقاد والعر ألبوا والمربي المروطان
0	a de la construir de la constru La construir de la construir de	and the second	a dealer it was a strike mean with relative the little of the set.	e a bente no de statilita in a bit a sur a sui il transmitto e sur il transmitto de sur sur il tra	addition and the loss of the state
-50	a nd a dama da a da	an ale a statistic sea la statistic d'un de la sub a statistic de alla statistic de la sub a sub a sub a sub a	al de la companya de	and the date of the state of th	1
(	5	D 10	0 15	i0 2	0
50	والمحمد والمراجب والمراجب والمراجب والمحمد والمراجب والمحمد والمحمد والمراجب	والأروب التجمير والمناقبة ووارين سناولان ويتبارك والمراجع فألوال والمرور	en allerbare en damentale, in then aller a sampling, bab dad bedar	والمراجعة والمراجعة والمتعادي والمتعافظ والمراجع والمراجع والمتعادين والمتعاولين والمتعاولين والمتعاول	المتنافير فاريد فدور بالشفار فرريان
0		an actional difference in a subsect of a subsect of the subsect of the	de likensk met skir der die die het die het die bester die het die het die so	en al al an an anna an an an an an an an an an a	erstilleiter en och one likitet oc
-5U 100	a se e di antinentifica da	والمعري والمرجوب والمناطرة فيتحدث والمنابي والمنابع والمنابع والمنابع والمنابع والمحد والمحد	The former and the second s	and a start of the	an
(	5	0 10	0 15	i0 2	0
50	ite second in the constraints and the second statistics of the field states in subscene words to	a de station i neur allista del labora a ulter tation, la tra men allatata antisticatione i	an allamater pater pater , avec number attaination deby the sound	and a addition of the state of the state base of the state of the stat	استان بيش أشبا ب
0	a first to the second standard state in the second state of the se	ne plane presidente de la constantine d	a second a second to reach the second program in the second second second second second second second second s		and the second secon
-50	a de la compacta de l	والفعالفية ويترون والصيبة أطلقه وعنوات الكراب المتحدية والمناصلة الطورين وفقيته	անելու են անդարձություն հանցերու հանցերին հանցերին հանցերին հանցերություն	and a start of the second start	han a mana a dalamata se
(	5	D 10	0 15	i0 2	00
100	والمحافظ والمراجع والمتحافظ والمراجع والمتحافظ والمتحافظ والمحافظ والمحافظ والمحافظ والمراجع والمحاف	a ni, mine katua ka halinin mari pata mine din katu katu ka ka mari kilancan ta akai dalaman da	والفرية فالأ الديكان يصحبناك يليني والثماني فينان والمحموري إيروان وعراقته ويرار	ير المالية الأحمام المارية التي ما ا <sup>لمسلك</sup> المربع من المقالية من ما ما علم مارية المعامرة المربع الم	ور والانظار مار در الدريا الاستار الالد ساهر .
0	<ul> <li>The second se Second second sec</li></ul>	the second s	energia configurational de companya de la construction de la construction de la construction de la construction	e and an	and the second
100	n de la collection de la construction de la construction de la construction de la construction de la construct	أحميا ألليا فيعار والمحجلان المرتبط ويطرل بقريان بماريها وكالكال فيماريها ويقوفه ألمان بمعيدين	a fa a su di al anta da anta d	ען אנט <mark>ו 11 ל 12 לא לא איר איר ל</mark> איר, און לאלא איראט אין על איראט אינאלע איראט איר און איראל אירא אירא איראט א	and the second
100	D 51	D 10	0 15	0 2	00
50	والطبابين بعرجون والمقاط المتعربة ويرون وبالطلان ويترج والترج حالتك فرجران والمتكاف ومراور	التعطير والرابي ويلتفريتهم وتفعل لمرار والفار للفتر لتقاور وترجي وال	ر مېږى يا الله يېلې يې ار بې اللې د يېلې د وليې د د المحمد زېږې د د اطلاب وري ور.	الطويلين ومطاقا والمعار ولقون فكالطويق والمستعط والمراج والمطالبان والمراطع والمطالبان والمتعاطين	The Andrew Market
0	a children have a differ a constitution of the	dan setua da mata selan bar setua setua da mata da mata da setua da setua da setua da setua da setua da setua d	need a second	and have not all the second states and the second state of the	and the second second
-50	all day a sheribed a she diblata a set with it a summary a su	anne a chailean an a	AA MATERIA A ANALA INTELE TALA TAMALAR TAMALAR	ter finnen eineffinisten bestehnten auf eine Betraft febr an	and the state of t
(	5 51	D 10	0 15	0 2	00
0		اللهم المراجع المراجع المراجع	<u>Ann.</u>	, du A. m.	_
100	WARMAN WARA AND WARMAN AND AND AND AND AND AND AND AND AND A		S THE AND A CONTRACT	where and the AN here human	
200 300	<u>Lila տեղ հետ հետ հեր հ</u>	a sa distana ako a 🔥	An example of the second se	गार अन्तित सम्बद्धाः र निष्ट्राका स	क के 1960 (1961 (1969) 
ſ	า	n 10	N 15	in 2	חר

SOURCE SIGNALS EXTRACTED BY SOBI









SOURCE SIGNALS EXTRACTED BY SOBI





SOURCE SIGNALS EXTRACTED BY SOBI





**EEG SIGNALS CLEANED BY BACKPROJECTION** 



#### **EEG SIGNALS CLEANED BY BACKPROJECTION**



**EEG SIGNALS CLEANED BY BACKPROJECTION** 



**EEG SIGNALS CLEANED BY BACKPROJECTION** 



### **Contrast functions robust to noise**

If some number of sources are closed to Gaussian noise after prewhitening and possible dimensionality reduction

$$\mathbf{Q} = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^{T} = \mathbf{V}_{M}\Lambda_{M}\mathbf{V}_{M}^{T} + \mathbf{V}_{N-M}\Lambda_{N-M}\mathbf{V}_{N-M}^{T}$$
$$\mathbf{z}(t) = \Lambda_{M}^{-1/2}\mathbf{V}_{M}^{T}\mathbf{x}(t)$$

kurtozis based contrast function can be applied to z. Since components of z have unit variance kurtozis  $k(z_m)=C_4(z_m)$ . Using multinearity property of the cumulants as operators it follows:

$$C_{4}(z_{m}) = \left| z_{m} = \sum_{k=1}^{M} b_{mk} s_{k} \right| = \sum_{k=1}^{M} b_{mk} C_{4}(s_{k})$$
$$= \sum_{k=1}^{\overline{M}} b_{mk} C_{4}(s_{k}) \quad \overline{M} < M, \ C_{4}(s_{k}) \approx 0 \ \forall k > \overline{M}$$

### **Contrast functions robust to noise**

Let us consider a contrast function that follows from minimization of the mutual information of y=Wx:

$$U(\mathbf{y}, \mathbf{W}) = -\log \left| \det(\mathbf{W}) \right| - \sum_{i=1}^{N} E\left\{ \log\left(p_i(y_i)\right) \right\}$$

True density functions  $p_i$  are mostly unknown and need to be approximated in some parametric fashion or estimated directly from data. If, however, noise is present the contrast function can be modified:

$$J(\mathbf{y}, \mathbf{W}) = -\log\left|\det(\mathbf{W}\mathbf{W}^{T})\right| - \frac{1}{1+q} \sum_{i=1}^{N} \left|C_{1+q}\left(y_{i}\right)\right|$$

Term **WW**<sup>T</sup> is necessary to avoid convergence toward trivial solution  $y_i=0$ . This can happen since  $C_{1+q}(0)=0$ .